164. Wallmanの compactification に就て

森田紀一　(1949.5.21)

完全正則空間Rをコンパクトな Hausdorff 空間Sへうつす連続写像は $\check{C}$ech のコンパクト化 $\beta(R)$ から Sへの連続写像に拡張されることはよく知られているが，ここでは，

定理．『T_1 空間Rをコンパクトな Hausdorff 空間Sへうつす連続写像は Wallman のコンパクト化 $w(R)$ から Sへの連続写像に拡張出来る』

ことを証明しよう．此の定理から「完全正則空間Rに対しては $w(R)$ から $\beta(R)$ の上へ Rの各点を不変に保つような連続写像が存在する」ことが直ちに知られるが，之は既に小松氏等により証明された結果である[1]．又「T_1 空間Rで定義された有界連続実函数は $w(R)$ にまで拡張される」という長田潤一氏の定理[2]も上の定理の特別な場合として得られる．（Tychonoff の定理を使へば，此の長田氏の定理から逆に上の定理が導かれる）

T_1 空間Rに於て，閉集合に成る極大フィルターの集合を R^* とし，Rの開集合Gに対し，$X\subset G$ なる閉集合Xを含む極大フィルターの全体を G^* とし，かゝる G^* の全体を R^* の open basis とした位相空間 R^* が即ち $w(R)$ である．以下 上の定理の証明を述べよう．

扨て Rをコンパクトな Hausdorff 空間Sへ うつす連続写像 f が与えられたとする．R^* の一点 $X=\{X_\alpha\}$ に対し（$\{X_\alpha\}$ は Rの極大フィルター），Sに於ける 集合系 $\{\overline{f(X_\alpha)}\}$ は有限交叉性をもつから，$\bigcap_\alpha \overline{f(X_\alpha)} \neq 0$．相異る二点 a, b が この共通集合に含まれるとすれば $\overline{V(a)} \frown \overline{V(b)} = 0$ なる a, b の近傍 $V(a)$，$V(b)$ がある $\overline{V(a)} \frown f(X_\alpha) \neq 0$，$\overline{V(b)} \frown f(X_\alpha) \neq 0$ より，$A=f^{-1}(\overline{V(a)})$，$B=f^{-1}(\overline{V(b)})$ は閉集合なる故，極大フィルター X に属しなければならないが，$A \frown B = 0$ であるから之は矛盾である．従って $\bigcap_\alpha \overline{f(X_\alpha)}$ は唯一点のみよりなる．この点を $f^*(X)$ とおく．X が Rの点xを含む極大フィルターなるときは，$f^*(X)=f(x)$ なることは明らかであるから，f^* が R^* で連続なることを証明すればよい．

$f^*(X)$ の任意の近傍 W に対し，$\overline{V}\subset W$ なる近傍Vをとり，$f^{-1}(V)=U$ とおけば，Uは Rの開集合であるが，U^* は X を含む．何となれば

$X=\{X_\alpha\}$ とすれば $f^*(X)=\bigcap_\alpha \overline{f(X_\alpha)}$，よって S がコンパクトなることより，$f^*(X)\subset V$ から

$$\bigcap_i \overline{f(X_{\alpha_i})}\subset V$$

なる有限個の X_{α_i} $(i=1,2,\cdots\cdots,\nu)$ がある．之等の X_{α_i} の共通集合は X に含まれるから，例へば X_β とすれば，

$$f(X_\beta)\subset V$$

よって $X_\beta\subset f^{-1}(V)=U$．従って $X\in U^*$

即ち U^* は X の近傍である．次に $X'\in U^*$ とすれば X' は $X'_\alpha\subset U$ なる開集合 X'_α を含む．従って $f(X'_\alpha)\subset V$ より $f^*(X')\in\overline{f(X'_\alpha)}\subset\bar{V}\subset W$．故に f^* は R^* で連続である．之で上の定理が証明された．

尚 T 空間に対しても，この開集合による極大フィルター $\{X_\alpha\}$ のうち $\bigcap_\alpha X_\alpha=0$ なる如きものをつけ加えることによって コンパクトな T 空間が得られ 之れ *Wallman* のコンパクト化といってよいであらうが 之に対して上述の定理がやはり成立することは 上の証明から明らかであらう．

註 1） 小松氏，紙上談話会第2輯第8号；武隈氏，同上，第2輯第11号には *Alexandroff* の証明が紹介されてゐる

2） 1）の小松氏の論文参照．